

Variante 3: Wenn

- $A(n_0)$ gilt
- und aus der Gültigkeit von $A(n_0), A(n_0+1), \dots, A(n)$ die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt, dann gilt $A(n) \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Beispiel zu Variante 3

(Division mit Rest)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$n = q \cdot m + r; \quad 0 \leq r < m$$

⌈ Aussage:

$$A(n) = \forall m \in \mathbb{N} : \exists q, r \in \mathbb{N}_0 : n = q \cdot m + r \wedge 0 \leq r < m$$

27.11.02

Beweis: Zu zeigen $A(n)$ gilt, für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang:

$n = 0$: mit $q = 0 \wedge r = 0$ ist der obige Satz für alle m erfüllt

Induktionsschluß: Sei $n > 0$

Induktionshyp.: $A(n')$ gilt für alle $n' \leq n$;

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}$ folgt daraus,

I: $n+1 < m$: Für $q=0$ und $r=n+1$
ist $n = q \cdot m + r$ erfüllt

12

II $n+1 \geq m$:

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{n - m + 1}$$

Es gilt β der J.H. existiert für n
jedes $n' < m+1$ und insbesondere
für $n' = n - m$ ein q' und r' derart,

$$\text{daß } n' = q' \cdot m + r'$$

$$\Rightarrow n - m = q_1 \cdot m + r_1$$

$$n = q_1 \cdot m + m + r_1$$

$$n = \underbrace{(q_1 + 1)}_{q_1'} \cdot m + \underbrace{r_1}_{r_1'} \quad \square$$

\Rightarrow auch für n existiert ein der-
artiges $q_1' = q_1 + 1$ und $r_1' = r_1$

6. Zusammenfassung mathematischer LT und Begriffe

6.1 Halbgruppen, Monoid, Algebren

Halbgruppe: Sei A Menge und " \cdot " eine
zweistellige Operation, wobei " \cdot " abge-
schlossen sei. F"ilt das Assoziativ-
gesetz

$$\forall a, b, c \in A: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad A \subseteq$$

so hei"t das Tripel $(A, \{\cdot\}, \{A \subseteq\})$
eine Halbgruppe.

Beispiele:

- ① Die nat"rlichen Zahlen bzgl. " $+$ "
- ② Die Zeichensequenzen C^* "ber einem
Alphabet C bildet bzgl. der Kom-
mutation (" \cdot ") eine nicht Kom-
mutative Halbgruppe

Monoid: Eine Halbgruppe $(A, \{\cdot\}, \{A \subseteq\})$
mit neutralem Element, d.h.

$$\exists \varepsilon \in A: \varepsilon \cdot a = a = a \cdot \varepsilon,$$

hei"t Monoid.

Beispiel: Die Zeichensequenzen mit dem
leeren Wort ε bilden ein Monoid.

Algebra: Ein Tripel ("Menge",
"Operationen", "Gesetze") bezeichnet
man als Algebra. Die "Menge" in
einer Algebra bezeichnet man als
Trägermenge. 14

Beispiele

$(\mathbb{Z}, \{+\}, \{A_{\mathbb{Z}}, K_{\mathbb{Z}}\})$ Algebra der
 \mathbb{Z} -Gruppe der ganzen Zahlen

$(C^*, \{0\}, \{A_{\mathbb{C}}\})$ Monoid der Zeichen-
sequenzen.

6.2 Relationen und Funktionen

Kartesisches Produkt: Seien M, N
Mengen. Dann heißt

$$M \times N := \{(x, y) : x \in M \wedge y \in N\}$$

das Kartesische (Mengen-) Produkt von
 M und N

Bemerkung: Die Verallgem. auf

$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ verläuft analog

Beispiel:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), \dots\}$$

Relation: Eine (zweistellige) Relation

ρ zwischen Mengen M und N ist ¹⁵
eine Teilmenge von $M \times N$:

$$\rho \subseteq M \times N$$

(n -stellige Relation entspr.)

Beispiel:

① Die Relation " $<$ " über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$"<" = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2), (1, 3), \dots \\ (2, 3), \dots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

oder übersichtlicher:

$$1 < 2 < 3 \dots$$

② Die Präfixrelation über Zeichen-
sequenzen: Sei C ein Alphabet und
 C^* die Menge der Zeichensequenzen.
Dann heißt $z \in C^*$ ein Präfix von x ,
wenn:

$$\exists y \in C^* : y \cdot z = x$$

anschaulich: " ab^* " ist Präfix von " bab^* "

Bemerkung: Eine n -stellige Relation kann
auch als n -stellige boolesche Abbildung
betrachtet werden